Aula 13

Semigrupos fortemente contínuos e geradores deles.

A ideia principal desta parte do curso é estudar soluções do problema de Cauchy abstrato

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases}, \text{ onde} \quad (1)$$

$A : D(A) \subseteq E \to E$ é um operador abstrato no espaço de Banach E, $u_0 \in E$.

Na aula 10 e 12 nós discutimos os casos particulares quando A era limitado ou setorial do ângulo $\varphi > \frac{\pi}{2}$. Nos ambos os casos a única solução foi dada por $u(t) = e^{tA}u_0$. Logo a tarefa principal é ampliar este método de sa resolução para A no caso geral.

Def: Seja $A : D(A) \subseteq E \to E$. A função $u(t) : [0,\infty) \to E$ é solução de (1) se $u(t) \in C^1([0,\infty), E)$, $u(t) \in D(A)$ para todo $t \geq 0$ e $u(t)$ satisfaz (1)

Na aula 12 nós observamos que e^{tA} é semigrupo dos operadores (i.e. $e^{tA}e^{sA} = e^{(t+s)A}$, $t,s \geq 0$).

Agora nós estudaremos o conceito abstrato do C_0-semigrupo:

Def 2 Seja esp. de Banach E. A família uniparamétrica $\{T(t)\}_{0\le t\le\infty} \subset B(E)$ é dita **C_0-semigrupo** (ou fortemente contínuo) se

1) $T(0)=I$ e $T(t+s)=T(t)T(s)$, $t,s\ge 0$ (propriedade de semigrupo)

2) $\lim\limits_{t\downarrow 0} T(t)x = x$, $\forall x\in E$ (propriedade de continuidade)

Def 3 $T(t)$ da Def 2 é dito **uniformemente contínuo** se $\lim\limits_{t\downarrow 0}\|T(t)-I\|=0$

Def 4 Seja $T(t)$ de Def 2 $\Rightarrow$ o operador linear A definido por $D(A)=\{x\in E : \exists \lim\limits_{t\downarrow 0}\frac{T(t)x-x}{t}\}$ e

$$Ax=\lim_{t\downarrow 0}\frac{T(t)x-x}{t}=\frac{d^+T(t)x}{dt}\Big|_{t=0},\quad x\in D(A).$$

é dito o gerador infinitesimal do ~~seu~~ C_0-semigrupo $T(t)$

esp. das funções unif-te cont. e lim.-s

Ex 1 $E=C_{bu}(-\infty,\infty)$, $\|f\|_E=\sup\limits_{(-\infty,\infty)}|f(t)|$. Seja $(T(t)f)(s)=f(t+s)$. É fácil ver que $T(t)$ é semigrupo e $\|T(t)\|\le 1$. Já que $\|T(t)f-f\|_E=\sup\limits_{(-\infty,\infty)}|f(s+t)-f(s)|\xrightarrow[t\to 0]{}0$, (f é unif-te cont.)

$T(t)$ é C_0-semigrupo.

Consideremos $\lim\limits_{t\downarrow 0}\frac{T(t)f-f}{t}=\lim\limits_{t\downarrow 0}\frac{f(t+s)-f(s)}{t}=f'(s)$

$\Rightarrow D(A)=\{f\in E ; \exists f' \text{ e } f'\in E\}$, $(Af)(s)=f'(s)$ é gerador infinitesimal.

Pode observar que $T(t)$ não é uniformemente cont.

De fato, sejam $f_n\in C_c(\mathbb{R})$ (funções com supp. comp.) com $0\le f_n\le 1$, $f_n(n)=1$

e supp $f_n \subseteq (n-\frac{1}{n}, n+\frac{1}{n})$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$

supp $T(\frac{2}{n}) f_n \subset (n-\frac{3}{n}, n-\frac{1}{n})$ $\Rightarrow$

$$\|T(\tfrac{2}{n}) - I\| \geq \|T(\tfrac{2}{n}) f_n - f_n\|_E = 1$$ como supp $f_n \cap$ supp $T(\frac{2}{n}) f_n = \emptyset$

Teorema 1 $A : D(A) \subseteq E \to E$ é gerador do semigrupo uniformemente contínuo sse $A \in B(E)$ ($D(A) = E$).

Dem $\Rightarrow$ Seja $A \in B(E)$ e $T(t) = \underset{B(E)}{e^{tA}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$ $\left(= \int_\Gamma e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} d\lambda,\ \sigma(A) \subset \operatorname{int}(\Gamma)\right)$

É fácil ver que $T(0) = I$ e

$T(t+s) = T(t) \cdot T(s)$ (use Cauchy formula para provar isso)

Do outro lado, $\|T(t) - I\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} \right\| = \left\| tA \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} \right\| =$

$\leq t\|A\| \, \|e^{tA}\| \leq t\|A\| e^{t\|A\|} \xrightarrow[t \to 0]{} 0$ e

$$\left\| \frac{T(t) - I}{t} - A \right\| = \left\| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{n!} A^n \right\| \leq \|A\| \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n \right\| =$$

$= \|A\| \, \|T(t) - I\| \xrightarrow[t \to 0]{} 0$ $\Rightarrow$ $T(t)$ é uniformemente cont. e A é gerador.

$\Leftarrow$ Suponha que $T(t)$ é unif-te cont. semigrupo dos op-s limitados em E. Seja $h > 0$ pequeno tal que

$\left\| I - h^{-1} \int_0^h T(s) ds \right\| < 1$ (existência de tal h segue da estimativa $\left\| h^{-1} \int_0^h (I - T(s)) ds \right\| \leq h^{-1} \int_0^h \|I - T(s)\| ds =$
$= h^{-1} \cdot h \, \|I - T(s^*)\| \xrightarrow[h \to 0]{} 0$, $s^* \in (0, h)$)

Por Teorema 1 da aula 2 $h^{-1} \int_0^h T(s) ds$ é inversível

$\Rightarrow \int_0^h T(s) ds$ é inversível. Agora

$$t^{-1} (T(t) - I) \int_0^h T(s) ds = t^{-1} \left(\int_0^h T(s+t) ds - \int_0^h T(s) ds \right) =$$

$$= t^{-1} \left(\int_h^{h+t} T(s) ds - \int_0^t T(s) ds \right) \Rightarrow$$

$$t^{-1}(T(t)-I) = \left(t^{-1}\int_h^{h+t} T(s)\,ds - t^{-1}\int_0^t T(s)\,ds\right)\left(\int_0^h T(s)\,ds\right)^{-1}$$ 4

$$\Longrightarrow_{t\to 0+} \quad \lim_{t\downarrow 0} t^{-1}(T(t)-I) =_{\text{em } B(E)} \underbrace{(T(h)-I)\left(\int_0^h T(s)\,ds\right)^{-1}}_{\text{é gerador infinitesimal}} \in B(E)$$

Observação 1) É fácil ver que $T(t)$ possui gerador único. Mais tarde nós vamos mostrar que recíproca também é verdadeira! Sejam $T(t)$ e $S(t)$ C_0-semigrupos com geradores A e B. Se $A = B \Rightarrow T(t) = S(t)$. $\Longrightarrow$

2) Portanto único C_0-semigrupo gerado por $A \in B(E)$ tem forma $T(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$.

3) Se $T(t)$ for um semigrupo uniformemente contínuo $\Rightarrow \|T(t)\| \le e^{\omega t}$ com $\omega \ge 0$.

De fato, neste caso $T(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(tA)^n}{n!} \Rightarrow$

$\|T(t)\| \le e^{t\|A\|}$, $A \in B(E)$.

Teorema 2 Sejam $T(t)$ um C_0-semigrupo $\Rightarrow$ existem $\omega \ge 0$ e $M \ge 1$ tais que

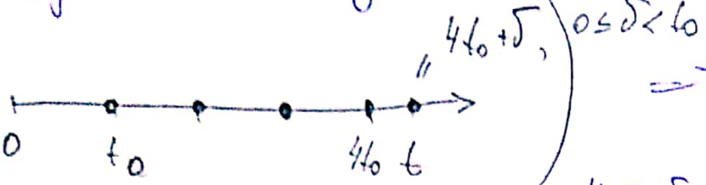
$$\|T(t)\| \le M e^{\omega t}, \quad t \in [0,\infty).$$

Demonstração Mostremos primeiro que $T(t)$ é limitado para $0 \le t \le t_0$, $t_0 > 0$. Se isso for falso, então $\exists \{t_n\}$ t.q. $t_n \ge 0$, $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$ e $\|T(t_n)\| \ge n$ (pense por que um considere $t_n \to 0$. Dica: use a prop-de do semi-grupo)

$\Rightarrow$ para algum $x \in E$, a sequência $\|T(t_n)x\|$ é não limitada. (Use o princípio de limitação uniforme para provar isso). Mas do outro lado, $\lim_{n\to\infty} T(t_n)x = x$ e ~~nto~~ $|\,\|T(t_n)x\| - \|x\|\,| \le \|T(t_n)x - x\| \Rightarrow \|T(t_n)x\|$ é limitada

Logo $\|T(t)\| \le M$, $t \in [0, t_0]$. Como $\|T(0)\| = 1$, $M \ge 1$.

Seja $\omega = t_0^{-1} \log M \ge 0$. Seja $t = n t_0 + \delta$, $0 \le \delta < t_0$



$\Rightarrow \|T(t)\| = \|T(n t_0 + \delta)\| =$

$= \|T(n t_0)\cdot T(\delta)\| = \|T(t_0)^n \cdot T(\delta)\| \le M^{n+1} \le M \cdot M^{\frac{t}{t_0}} =$

usei $n = \frac{t-\delta}{t_0}$

$= M \cdot \left(e^{\log M}\right)^{\frac{t}{t_0}} = M \cdot e^{t\omega}$

Corolário $[0,\infty) \ni t \longmapsto T(t)x \in E$ é contínua.

Demonstração Sejam $t, h \ge 0 \Rightarrow$

$\|T(t+h)x - T(t)x\| \le \|T(t)\|\,\|T(h)x - x\| \le M e^{\omega t}\|T(h)x - x\|$ e

para $t \ge h \ge 0$:

$\|T(t-h)x - T(t)x\| \le \|T(t-h)\|\,\|x - T(h)x\| \le M e^{\omega t}\|x - T(h)x\|$.

Proposição 1 Seja $T(t)$ um C_0-semigrupo com gerador A

$\Rightarrow$

1) Para $x \in E$: $\lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)x\,ds = T(t)x$

2) Para $x \in E$; $\int_0^t T(s)x\,ds \in D(A)$ e $A\left(\int_0^t T(s)x\,ds\right) = T(t)x - x$

3) Se $x \in D(A) \Rightarrow T(t)x \in D(A)$ e $\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax$ (2)

4) Se $x \in D(A) \Rightarrow T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)Ax\,d\tau = \int_s^t AT(\tau)x\,d\tau$

Demonstração 1) Segue da continuidade de $t \to T(t)x$.

2) Seja $h > 0 \Rightarrow \frac{T(h) - I}{h}\int_0^t T(s)x\,ds = \frac{1}{h}\int_0^t \left(T(s+h)x - T(s)x\right)ds$

$= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)x\,ds - \frac{1}{h}\int_0^h T(s)x\,ds \xrightarrow[h \downarrow 0]{} T(t)x - x$ (usei item 1))

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{h \downarrow 0} \frac{T(h) - I}{h}\int_0^t T(s)x\,ds = T(t)x - x \Rightarrow$

$\int_0^t T(s)x\,ds \in D(A)$ e $A\left(\int_0^t T(s)x\,ds\right) = T(t)x - x$.

3) Seja $h>0 \Rightarrow \frac{T(h)-I}{h} T(t)x = T(t)\left(\frac{T(h)-I}{h}\right)x \xrightarrow[h\downarrow 0]{} T(t)Ax$ (6)

$\Rightarrow T(t)x \in D(A)$ e $AT(t)x = T(t)Ax$, alem disso temos

$$\frac{d^+}{dt} T(t)x = \lim_{h\downarrow 0} \frac{T(t+h)-T(t)}{h} x = \lim_{h\downarrow 0} T(t)\left(\frac{T(h)-I}{t}\right)x =$$

$= AT(t)x = T(t)Ax.$

Para provar (2) devemos achar „left-derivative".

Sejam $0 \le h \le t \Rightarrow \lim_{h\downarrow 0}\left[\frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} - T(t)Ax\right] =$

$$= \lim_{h\downarrow 0} \underbrace{T(t-h)}_{\text{limitado}} \underbrace{\left[\frac{T(h)x-x}{h} - Ax\right]}_{\to 0 \text{ já que } x\in D(A)} + \lim_{h\downarrow 0} \underbrace{\left(T(t-h)Ax - T(t)Ax\right)}_{\to 0 \text{ já que } T(t) \text{ é fort-te continua}}$$

$$\Rightarrow \frac{d^-}{dt} T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax.$$

4) Segue do 3) pela integração da (2).

Cololario Se A é gerador inf-l do C_0-grupo $T(t)$

$\Rightarrow \overline{D(A)} = E$ e A é fechado.

Demonstração Seja $x \in E$ e $x_t = \frac{1}{t}\int_0^t T(s)x\,ds \underset{\text{Prop 1.2)}}{\Rightarrow}$

$x_t \in D(A)$, para $t>0$ e por Prop 1.1) $x_t \xrightarrow[t\downarrow 0]{} x \Rightarrow$

$\overline{D(A)} = E$. Mostremos que A é fechado. Seja $x_n \in D(A)$

tal que $\begin{cases} x_n \to x \\ Ax_n \to y \end{cases}$. Da Prop 1.4) segue que

$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(s)Ax_n\,ds \underset{n\to\infty}{\Rightarrow} T(t)x - x = \int_0^t T(s)y\,ds \Rightarrow$$

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}(T(t)x - x) = \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}\int_0^t T(s)y\,ds \underset{\text{Prop 1.1)}}{=} y \text{ e}$$

portanto $x \in D(A)$, $Ax = y$.

Proposição 2 Suponha que A é gerador do C_0-semigrupo $T(t)$ e $u_0 \in D(A)$ $\Rightarrow$ a função $u(t) = T(t)u_0$ é a única solução do problema (1).

Demonstração O fato que $u(t) = T(t)u_0$ é a solução segue da Prop 1.2) (observe que $T(t)u_0 \in C^1([0,\infty), E)$ já que $AT(t)u_0 = T(t)Au_0$ e $T(t)Au_0$ é contínuo)

Mostramos a unicidade. Suponha que $v(t)$ é a outra solução da (1). Seja $t>0$ e $w(s) = T(t-s)v(s)$, $s \in [0,t]$. Seja $h \in [-s, t-s] \setminus \{0\}$ $\Rightarrow$

$$\frac{1}{h}(w(s+h) - w(s)) = T(t-s-h)\frac{1}{h}(v(s+h) - v(s)) - \frac{1}{-h}(T(t-s-h) - T(t-s))v(s)$$

Observando que $v(t) \in C^1([0,\infty), E)$ e $v(s) \in D(A)$, obtemos

$$w'(s) = T(t-s)v'(s) - T(t-s)Av(s) = T(t-s)\underbrace{(v'(s) - Av(s))}_{\text{já que } v(t) \text{ é solução de (1)}} = 0$$

$\Rightarrow \forall y^* \in E$ a função $\langle w(s), y^* \rangle_{E \times E^*}$ é derivável e

$\frac{d}{ds}\langle w(s), y^* \rangle_{E \times E^*} = 0 \Rightarrow \langle w(s), y^* \rangle_{E \times E^*} = const \Rightarrow$

$$\langle T(t)u_0, y^* \rangle_{E \times E^*} = \langle w(0), y^* \rangle_{E \times E^*} = \langle w(t), y^* \rangle_{E \times E^*} = \langle v(t), y^* \rangle_{E \times E^*}$$

$t > 0 \Rightarrow T(t)u_0 = v(t)$

Corolário Sejam $T(t)$ e $S(t)$ C_0-semigrupos com geradores A e B. Se $A = B \Rightarrow T(t) = S(t)$, $t \geq 0$.

Demonstração Pela Prop. 2 $y_1(t) = T(t)u_0$ e $y_2(t) = S(t)u_0$ são soluções de (1). Pela unicidade de solução $T(t)u_0 = S(t)u_0$, $u_0 \in D(A)$. Como $\overline{D(A)} = E$,

$T(t)x = S(t)x\ ,\ \forall x \in E.$

Lema 1 Seja A gerador inf. do C_0-semigrupo $T(t)$ $\Rightarrow$

$$\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n)} = E.$$

Demonstração Seja D o conjunto das f-s infinitamente diferenciáveis complexas com suporte compacto em $]0,\infty[$.
Pegue $x \in E$ e $\varphi \in D$ e define $y = x(\varphi) = \int_0^\infty \varphi(s) T(s) x \, ds$

Se $h>0 \Rightarrow$

$$\frac{T(h)-I}{h} y = \frac{1}{h}\int_0^\infty \varphi(s)\left[T(s+h)x - T(s)x\right]ds =$$

$$= \int_0^\infty \underbrace{\frac{1}{h}\left[\varphi(s-h) - \varphi(s)\right]}_{\downarrow h \downarrow 0 \quad -\varphi'(s)T(s)x \text{ uniform-te em } [0,\infty)} T(s)x\,ds =$$

$\Rightarrow Ay = -\int_0^\infty \varphi'(s) T(s) x \, ds$. Repetindo o processo, obtemos

$A^n y = (-1)^n \int_0^\infty \varphi^{(n)}(s) T(s) x \, ds\ ,\ n = 1, 2, 3, \dots \Rightarrow y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n)$.

Definimos $Y = \text{span}\{x(\varphi) : x \in E, \varphi \in D\}$. Temos $Y \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n)$.
Basta provar que $\overline{Y} = E$. Suponha que $\overline{Y} \neq E \Rightarrow$
$\exists\, y^* \in E^*$, $y^* \neq 0$ tal que $\langle y, y^* \rangle_{E \times E^*} = 0\ \forall y \in Y \Rightarrow$

$$\int_0^\infty \varphi(s) \langle T(s)x, y^* \rangle_{E\times E^*} ds = \left\langle \int_0^\infty \varphi(s) T(s) x\, ds, y^* \right\rangle_{E \times E^*} = 0$$

$\forall x \in E, \varphi \in D$. Como a função $s \longmapsto \langle T(s)x, y^* \rangle_{E\times E^*}$ é contínua $\Rightarrow \langle T(s)x, y^* \rangle_{E \times E^*} \equiv 0, \forall s \in [0,\infty)$. (Se for contrário, $\exists\, \varphi \in D$ tal que $\int_0^\infty \varphi(s) \langle T(s)x, y^* \rangle_{E\times E^*} ds \neq 0$) $\Rightarrow$ em particular,
$\langle x, y^* \rangle = \langle T(0)x, y^* \rangle = 0\ \forall x \in E \Rightarrow y^* = 0$ (contradição)

Ex 2 $E = C[0,1]$, $D(A) = \{f \in C^1[0,1] : f(1) = 0\}$, $(Af)(t) = f'(t)$.
Temos, $\overline{D(A)} = \{f \in C[0,1] : f(1) = 0\} \neq E \Rightarrow A$ não pode ser um gerador infinitesimal do C_0-semigrupo.